数学

Complimentary Video

「これでわかった！ベイズの定理 」

重要問題解説

（1）事象と確率

主要類型＝確率を求める。

①場合分け・虱潰し

②ベイズの定理

本ビデオのテーマ

③巴戦

④行ったり来たりの運動

その他　独立性など

主要類型　②ベイズの定理

重要問題　H25　1.（1）

ある製品を生産する機械が3 台あり、それをX、Y、Zとする。X、Y、Zはそれぞれ製品全体の20%, 30%, 50%を生産する。また、Y から生産される製品のうち2%の割合で不良品が含まれることが経験的に知られている。いま、製品が不良品であるとき、それがX、Y、Zの各機械から生産されたものである確率の比はそれぞれ8：6：5の関係にあることが分かった。このとき、X から生産される製品のうち不良品が含まれる割合は［　　　］%である。

主要類型　②ベイズの定理

重要問題　H25　1.（1）

X、Y、Zが各々20%，30%，50%を生産。Yは2%が不良品。不良品があった時、X、Y、Z から生産されていた確率は8：6：5の比率。Xの製品の不良品割合は？

この問題のポイント

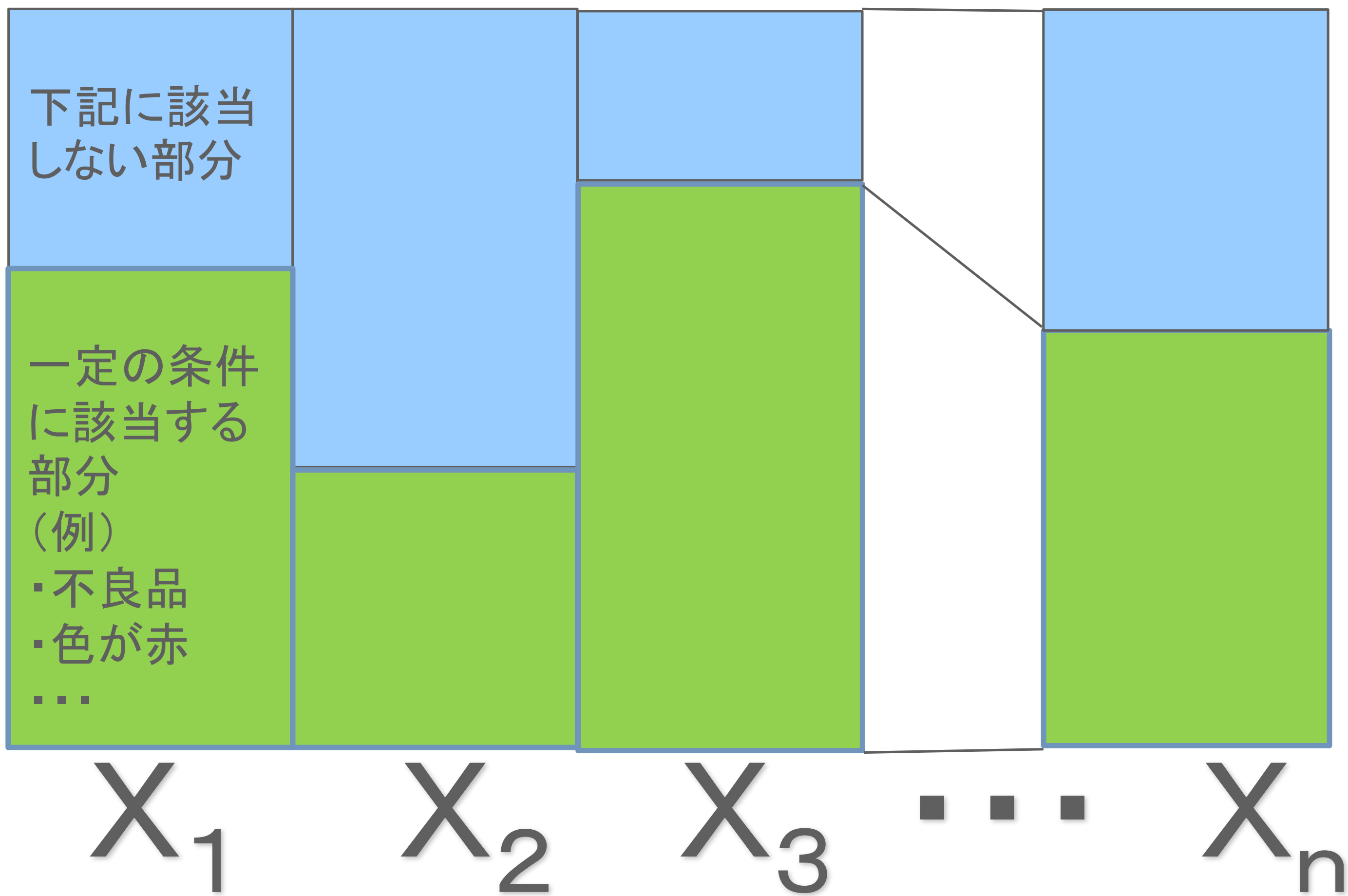
ベイズの定理の典型問題のひとつ。

条件付確率の基本をあてはめる。

各区分の確率を計算し代入する。

主要類型　②ベイズの定理

ベイズの定理の基本図式



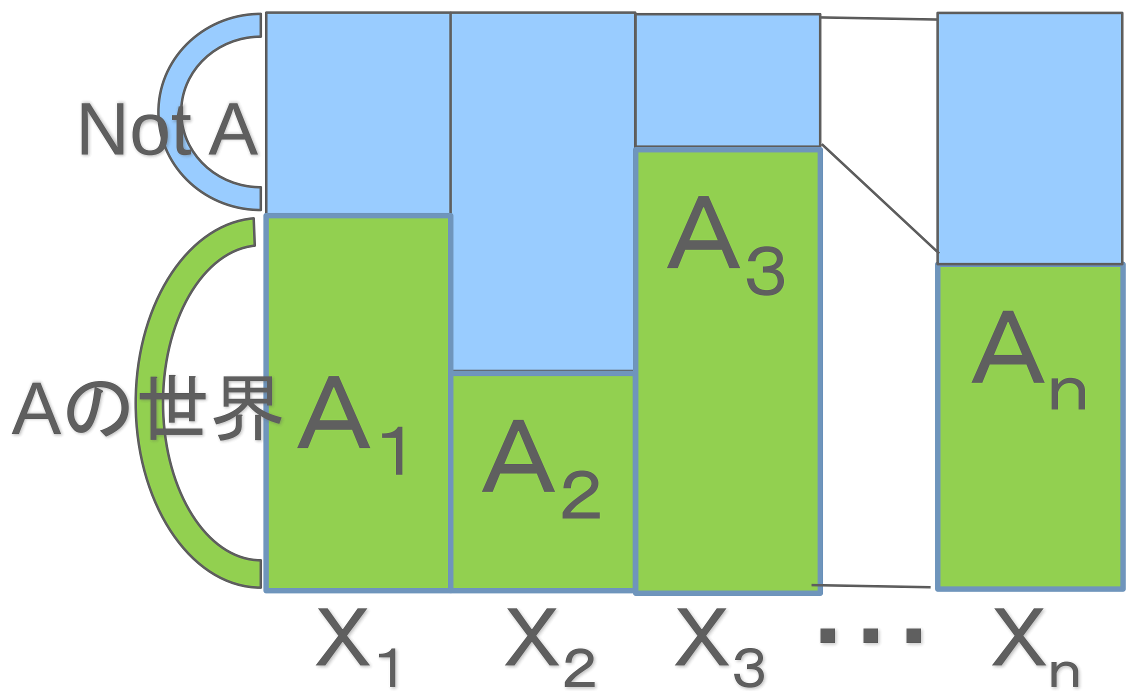
主要類型　②ベイズの定理

ベイズの定理の基本図式

$P(A|X_i)$：X_iの「短冊」の中のA_iの割合＝$P(A_i)/P(X_i)$

$P(X_i|A)$：A（緑）の面積中のA_iの割合＝$P(A_i)/P(A)$

$P(A) = \sum P(A_j)$



$P(X_i|A)$の意味：

「A（例：不良品）だとわかった時、それがX_iに由来する確率」

主要類型　②ベイズの定理

条件付確率(およびベイズの定理)を徹底理解。

青と緑を合わせ長方形の全体が世界＝Universe。

X_1, X_2, X_3 ･･･, X_n は､｢世界の分割｣。

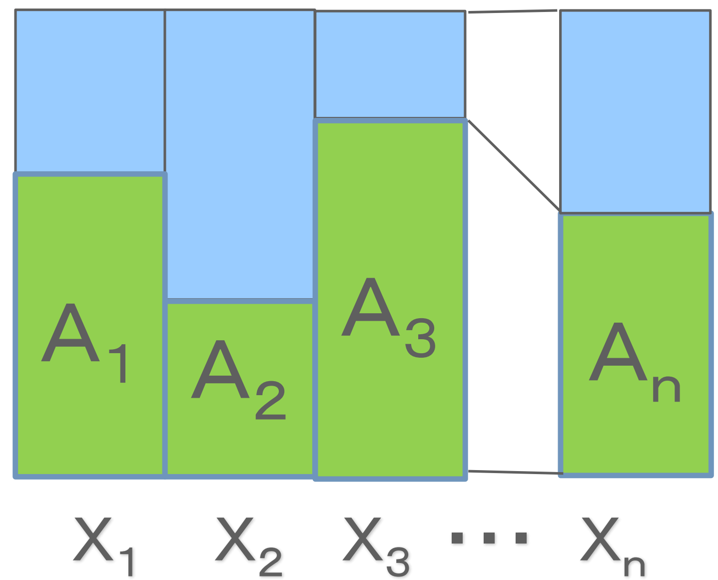
$P(X_i|A)$: Aが起きた場合、それが

i番目の X_i に由来する確率

＝A(緑全体)のA_iの割合

$= P(A_i)/P(A)$

$(P(A) = \sum P(A_j))$



主要類型　②ベイズの定理

X、Y、Zが各々20%，30%，50%を生産。Yは2%が不良品。不良品があった時、X、Y、Z から生産されていた確率は8：6：5の比率。Xの製品の不良品割合は？

（図だけを見て解く方法）

Xに対するA_1の面積比が答え。

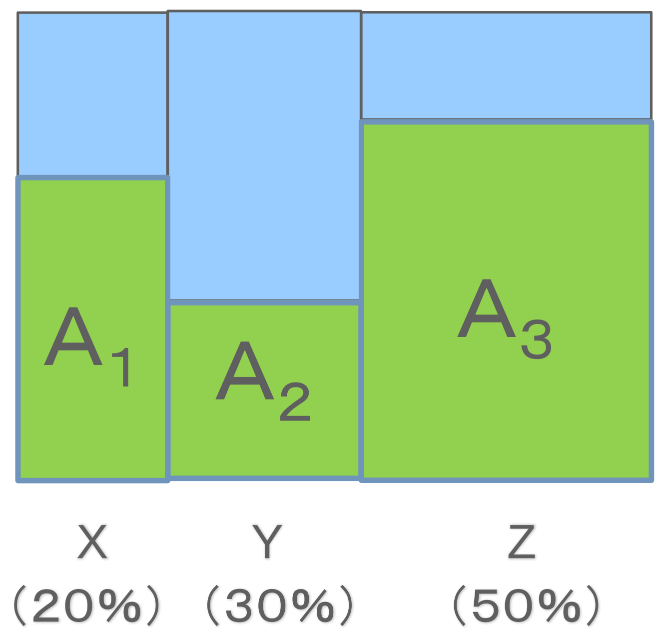
全体を1として、A_2 ＝Y・2%

＝0.3･0.02＝0.006

題意から、

A_1:A_2 ＝8：6 ⇒A_1＝0.008

Xの不良率＝0.008/0.2＝ **4%**



主要類型　②ベイズの定理

ベイズの公式でもう一度復習。

不良品である事象を　A　とする。X、Y、Zをそれぞれの機械から生産された事象とする。

求める値は　P(A|X)である。

①P(X|A)とP(Y|A)の比
②P(A|Y)の値

が与えられている

⇒これを使えるように式を立てる。(P(Z|A)との比は無用)

主要類型　②ベイズの定理

ベイズの公式

$$P(X|A) = P(X) \cdot P(A|X) / P(A) \quad \cdots ①$$
$$P(Y|A) = P(Y) \cdot P(A|Y) / P(A) \quad \cdots ②$$

ここで、①:②の比は8:6、

$P(X)=0.2$、$P(Y)=0.3$、$P(A|Y)=0.02$

よって、$6 \cdot 0.2 \cdot P(A|X) = 8 \cdot 0.3 \cdot 0.02$

$$P(A|X) = 4\%$$

主要類型　②ベイズの定理

（ベイズの公式の意味を図で復習）

$P(X|A) = P(X) \cdot P(A|X)/P(A)$ を

$P(X|A) \cdot P(A) = P(X) \cdot P(A|X)$ と変形。

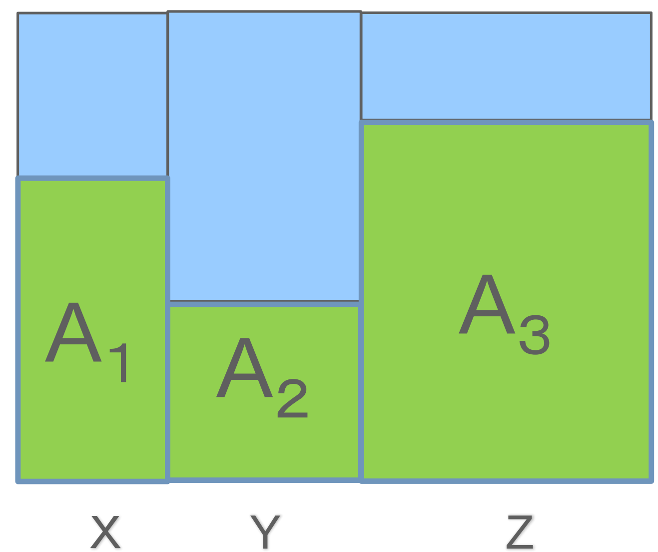
両辺ともに図の A_1 を意味している。

左辺＝（A全体の中のA_1のウエイト）

× （A全体の面積）

右辺＝（Xの中のA_1のウエイト）

× （Xの面積）



主要類型　②ベイズの定理

類題　H23　1.（1）

外見からは全く区別のつかない2つの箱がある。1つの箱（Rと呼ぶ）には70個の赤球と30個の白球が入っており、もう1つの箱（Wと呼ぶ）には30個の赤球と70個の白球が入っている。2つの箱から1つを無作為に選び、その箱から復元抽出によって1球ずつ12回取り出したところ、赤球が8回、白球が4回出現した。このとき、選ばれた箱がRである確率に最も近い数値は［　　　］である。

主要類型　②ベイズの定理

それぞれの箱が選ばれる事象をR、Wで、題意の色の球が取り出される事象をFで表す。ベイズの公式により、

$$P(R|F)=P(R)\cdot P(F|R)/P(F)$$

$P(R)=1/2$　（R、Wは無作為に選ぶ）

P(F|R)はベルヌーイ試行。Rは赤玉70%なので、

$$P(F|R)={}_{12}C_8(0.7)^8(0.3)^4$$

残る「材料」はP(F)のみ。

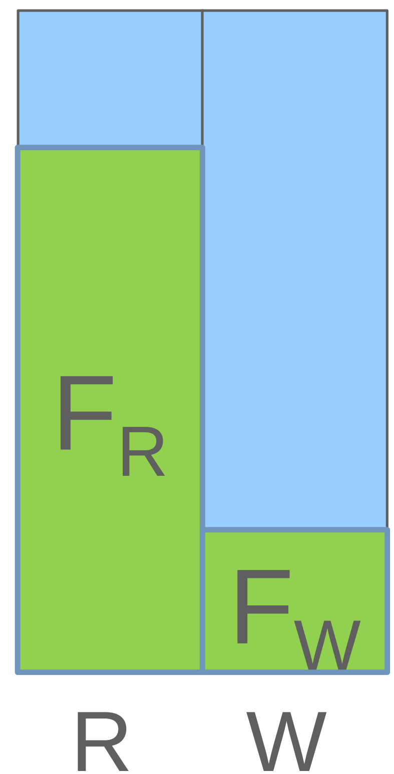
主要類型　②ベイズの定理

$$P(F)$$

$$= P(R)\cdot P(F|R) + P(W)\cdot P(F|W)$$

$$= 1/2\{\ P(F|R) + P(F|W)\ \}$$

$$= 1/2\{\ {}_{12}C_8(0.7)^8(0.3)^4 + {}_{12}C_8(0.7)^4(0.3)^8\ \}$$



主要類型 ②ベイズの定理

これで材料はそろったので、

$P(R|F)=P(R)\cdot P(F|R)/P(F)$

$=1/2\cdot {}_{12}C_8(0.7)^8(0.3)^4$

$\quad /[1/2\cdot\{{}_{12}C_8(0.7)^8(0.3)^4+{}_{12}C_8(0.7)^4(0.3)^8\}]$

$=(0.7)^8(0.3)^4/\{(0.7)^8(0.3)^4+(0.7)^4(0.3)^8\}$

$=(0.7)^4/\{(0.7)^4+(0.3)^4\}$

$=7^4/\{7^4+3^4\}=$ <u>0. 9674・・・・</u>